Obyčejné diferenciální rovnice

Př: 1) růst populace: $y'(t) = k\, y(t)$.

Počáteční úloha: $y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow y(t) = y_0 e^{kt}$.

2) Omezené zdroje: Verhulst $\quad y'(t) = k y(t) \cdot (1 - y(t))$

růst úměrný < velikosti populace / množství dostupných zdrojů.

3) Newtonova mechanika: $F = ma$, tj. $m x''(t) = F$

4) Hodgkin–Huxley: 3 nelin. ODR pro reakci neuronu na podnět.

5) $y'(x) = x^2 + y^2$ – ∃ řešení, nelze zapsat konečnou kombinací elem. fcí.

$y'(x) = f(x, y(x))$, $y(a) = y_0$, $y: [a,b] \to \mathbb{R}$

∃!: Picardova věta: f spoj., Lip. spoj. vzhledem k y.

Směrové pole:

Numerické řešení ODR: Dělení $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$

• pro jednoduchost rovnoměrné dělení $x_n = a + nh$, h = krok metody.

• $y(x_n) \approx y_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, \dots, N$

Eulerova metoda: $\underbrace{y(x_{n+1})}_{\approx y_{n+1}} \overset{\approx}{=} y(x_n + h) = \underbrace{y(x_n)}_{\approx y_n} + \underbrace{y'(x_n)}_{= f(x_n, \underbrace{y(x_n)}_{\approx y_n})} \cdot h + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{2} h^2 y''(\xi_n)}}_{\text{zanedbám}}$

Def: Eulerova metoda: $y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$, $n = 0, \dots, N-1$

y_0 dáno = poč. podmínka.

Pozn: Explicitní metoda (explicitní vzorec pro y_{n+1})

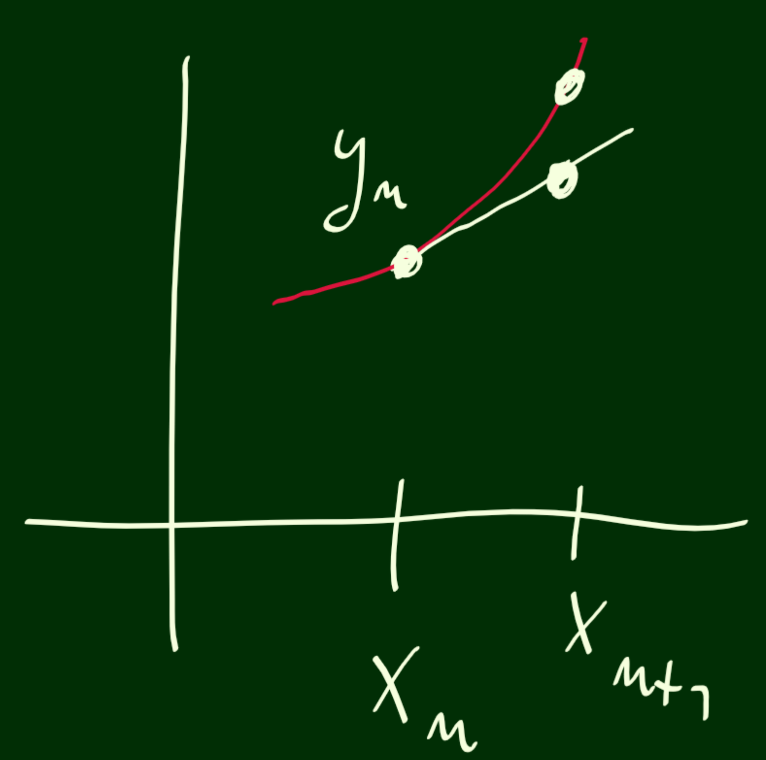
- Implicitní Eulerova metoda: $y_{n+1} = y_n + h\, f(x_{n+1}, y_{n+1})$

  Taylor z $y(x_{n+1})$ "dozadu" do $y(x_n)$: $y(x_n) = y(x_{n+1}) - h\, y'(x_{n+1})$

  nelin. problém pro y_{n+1} (Newton?)

- odpovídá $\underbrace{\frac{y_{n+1}-y_n}{h}}_{\sim y'(x_n)} = f(x_n, y_n)$ – zanedbaný člen je $O(h)$ – metoda 1. řádu.

-



Heunova metoda: (modifikovaná Eulerova metoda)

$$y' = f(x,y) \quad \Big| \int_{x_n}^{x_{n+1}} \dots dx$$

$$\underset{\underset{y_{n+1}}{\approx}}{y(x_{n+1})} - \underset{\underset{y_n}{\approx}}{y(x_n)} = \underbrace{\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\,dx}_{\sim \text{lichoběžníkové pravidlo}}$$

$\left(\text{Euler: } \int_{x_n}^{x_{n+1}} f\dots\, dx \sim \overset{\text{obdélníkové pravidlo}}{h f(x_n, y_n)}\right)$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}\Big(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \underbrace{y_{n+1}}_{\sim y_n + hf(x_n, y_n)})\Big)$$ – implicitní schéma; $\sim y_n + hf(x_n,y_n)$ – explicitní

Zápis:

$$\left[\begin{aligned} k_1 &:= f(x_n, y_n) \\ k_2 &:= f(x_{n+1}, y_n + h k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \end{aligned}\right.$$

– Heunova metoda – metoda 2. řádu

zanedbám $O(h^2)$ členy

– chyba bude $O(h^2)$

Jednokrokové metody (JKM) – y_{n+1} počítám jen z y_n (oproti vícekrokovým: $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots$)

Def: JKM: $y_{n+1} = y_n + h\,\Phi(x_n, y_n, h)$, $n = 0, 1, \dots$

Φ = přírůstková funkce: Euler: $\Phi(x,y,h) = f(x,y)$

Heun: $\Phi(x,y,h) = \frac{1}{2}\left[f(x,y) + f(x+h, y + hf(x,y))\right]$

Předp. Φ: spoj., Lip. spoj. vzhledem k y (jako f)

Def.: Metoda je konzistentní, pokud $\Phi(x, y, 0) = f(x, y)$ $\forall x, y$

$$\left(\lim_{h \to 0+} \Phi(x, y, h) = f(x, y) \right)$$

- Euler, Heun splňují
- Konzistence s původní rovnicí, v limitě $h \to 0+$ řeším správnou rovnici.